

CLASSE 49/A - MATEMATICA E FISICA

Ambito Disciplinare 8

Programma d'esame

CLASSE 38/A - FISICA

CLASSE 47/A - MATEMATICA

CLASSE 49/A - MATEMATICA E FISICA

Temi d'esame proposti in precedenti concorsi

CLASSE 49/A - MATEMATICA E FISICA

Programma d'esame

CLASSE 38/A - FISICA

CLASSE 47/A - MATEMATICA

CLASSE 49/A - MATEMATICA E FISICA

Le indicazioni contenute nelle «Avvertenze generali» sono parte integrante del programma di esame.

Programma di MATEMATICA

Classi: 47/A e 49/A

L'esame comprende una prova scritta e una prova orale.

Le prove di matematica, scritta e orale, vertono sugli argomenti contenuti nell'*Allegato A*, nonché sulle problematiche metodologiche e didattiche relative alla matematica.

Prova scritta

La prova scritta, *comune e obbligatoria per le classi di concorso 47/A e 49/A*, consiste nello svolgimento di quesiti di matematica tra più proposti con riferimento ai contenuti previsti nell'*Allegato A*.

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrice tascabile numerica non programmabile.

Durata della prova: 8 ore.

N.B.: L'esito positivo della prova scritta è condizione di ammissione alle prove successive (D.M. 10 agosto 1998, n. 354, art. 4, comma 2).

Prova orale

La prova orale verte sui contenuti previsti nell'*Allegato A* e sugli aspetti metodologico-didattici della matematica.

1. Elementi di logica matematica: il calcolo proposizionale; regole d'inferenza e derivazioni nel calcolo dei predicati.

Il metodo ipotetico deduttivo: concetti primitivi, assiomi, definizioni, teoremi. Coerenza, indipendenza e completezza di un sistema di assiomi. Sistemi formali e modelli.

2. Algoritmi e loro proprietà. Costruzione di algoritmi e loro traduzione in un linguaggio di programmazione.

Insiemi di dati e loro strutture notevoli.

Implementazione di algoritmi diretti e iterativi. Controllo della precisione. Algoritmi ricorsivi. Complessità computazionale.

Formalizzazione del concetto di algoritmo. Tesi di Church. Funzioni non calcolabili. Problemi non decidibili.

3. Nozioni di teoria degli insiemi: operazioni sugli insiemi, prodotto cartesiano, relazioni. Strutture d'ordine.

Gli insiemi numerici: N , Z , Q , R , C . Numeri algebrici e numeri trascendenti. Principio d'induzione.

Cardinalità di un insieme. Insiemi infiniti e confronto tra essi.

Strutture algebriche: gruppo, anello, corpo. Spazi vettoriali. Basi, trasformazioni lineari.

Matrici, determinanti, risoluzione di sistemi lineari. Struttura algebrica dell'insieme delle matrici.

4. La geometria euclidea e i suoi assiomi. Geometria affine e proiettiva. Geometrie non euclidee. Spazi topologici.

Il metodo analitico in geometria: curve e superfici algebriche.

Trasformazioni geometriche: isometrie, similitudini, affinità, proiettività.

Trasformazioni topologiche. Le geometrie secondo il programma di Klein.

5. Successioni numeriche. Funzioni.

Limite, continuità. Calcolo differenziale per funzioni di una e più variabili reali.

Il problema della misura. Calcolo integrale per funzioni di una variabile reale.

Serie numeriche. Sviluppo in serie di una funzione in una variabile reale: serie di potenze, serie di Fourier.

Equazioni differenziali ordinarie.

6. Il calcolo numerico: errori e loro propagazione, interpolazione. Risoluzione approssimata di equazioni. Integrazione numerica.

7. Eventi aleatori. Probabilità: definizioni, valutazioni e proprietà.

Probabilità condizionata, indipendenza stocastica. Teorema di Bayes.

Variabili aleatorie. Alcune distribuzioni di probabilità: binomiale, geometrica, di Poisson, rettangolare o uniforme su un intervallo, esponenziale, normale.

Convergenze: legge dei grandi numeri e teorema centrale del limite.

Relazioni fondamentali tra le diverse distribuzioni.

8. Indagine statistica: fasi dell'indagine, rilevazione dei dati, codifica e archiviazione. Analisi statistica univariata: distribuzioni statistiche e rappresentazioni grafiche. Indici statistici per variabili quantitative e proprietà.

Analisi statistica bivariata: distribuzioni statistiche bivariate (tabelle a doppia entrata); distribuzioni congiunte, condizionate, marginali; indipendenza e connessione.

Regressione. Adeguatezza del modello. Bontà dell'adattamento. Regressione lineare multipla.

Inferenza statistica: schemi di campionamento; problemi e metodi di stima parametrica.

9. Strumenti e programmi informatici per il calcolo matematico numerico e per la grafica.

10. I principali momenti della storia della matematica.

Programma di FISICA

Classi: 38/A e 49/A

L'esame comprende una prova scritta, una prova pratica e una prova orale.

Prova scritta

La prova scritta, *comune e obbligatoria per le classi di concorso 38/A e 49/A*, consiste nello svolgimento di un tema scelto dal candidato fra tre proposti; il tema verte sulla trattazione critica di un argomento e/o di un problema, che può prevedere una risoluzione numerica; può anche essere richiesta l'integrazione della trattazione con una proposta didattica, per esempio l'organizzazione di una lezione o di un'esperienza di laboratorio.

E' consentito soltanto l'uso di calcolatrice tascabile.

Durata della prova: 8 ore.

Prova pratica

La prova pratica, *aggiuntiva per le classi di concorso 38/A e 49/A*, è proposta dalla commissione esaminatrice e si svolge in laboratorio; essa può riguardare la misura di una o più grandezze fisiche, la verifica di una legge o lo studio di un fenomeno fisico; il risultato deve essere descritto e commentato in un'apposita relazione scritta.

La prova scritta e quella pratica vertono sugli argomenti compresi nell'*Allegato B*.

Prova orale

La prova consiste nella trattazione scientifica e didattica di argomenti compresi nell'*Allegato B*.

- Storia e didattica della fisica

Sviluppo della ricerca scientifica in fisica, con particolare attenzione alla fisica del 1900. Evoluzione nella didattica della fisica. Il metodo sperimentale. Analisi di contenuti e didattica della fisica nei programmi delle scuole di ogni ordine e grado.

- Grandezze fisiche e loro misura

Grandezze fisiche scalari e vettoriali. Calcolo vettoriale. Equazioni dimensionali. Sistema S. I. delle unità di misura. Interazione tra osservatore e sistema osservato. Strumenti di misura. Valutazione degli errori di una misura. Cifre significative. Utilizzo di almeno un linguaggio di programmazione. Utilizzo dei principali pacchetti applicativi (video scrittura, foglio elettronico, database, simulazioni). Metodologia on-line nel laboratorio di fisica.

- Meccanica del punto materiale e del corpo rigido

Le tre leggi della dinamica. Descrizione cinematica e dinamica del moto di un punto materiale. Sistema di punti materiali. Corpo rigido. Centro di massa. Conservazione della quantità di moto e del momento angolare. Lavoro di una forza e del momento di una forza. Energia cinetica di traslazione e di rotazione. Condizioni d'equilibrio. Forze d'attrito. Principio di conservazione dell'energia meccanica. Urti in una e in due dimensioni. Forze conservative e non conservative. Statica e dinamica dei fluidi. Limiti della meccanica newtoniana per grandi velocità.

- Sistemi di riferimento e relatività

Sistema di riferimento inerziale. Trasformazioni di Galilei. Invarianza delle leggi della meccanica. Forze apparenti. La non invarianza della teoria elettromagnetica. Misure della velocità della luce. Esperimento di Michelson - Morley. La simultaneità come concetto relativo. Trasformazioni di Lorentz. Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi. Composizione relativistica della velocità. Spazio-tempo di Minkowski. Massa e quantità di moto relativistici. Relazione tra massa ed energia. Effetto Doppler relativistico.

- Forze e campi

Concetto di campo come superamento dell'azione a distanza. Campi scalari e vettoriali. Campo gravitazionale. Campo elettrico nel vuoto e nella materia. Moto di masse nel campo gravitazionale. Moto di cariche nel campo elettrostatico. Circuitazione e flusso. Teorema di Gauss. Capacità elettrica e condensatori. Campo magnetico nel vuoto e nella materia. Concetti di campo conservativo e non conservativo. Flusso e circuitazione di B. Teorema di Ampère. Moto di cariche in un campo magnetico: forza di Lorentz. Energia e densità d'energia nei campi elettrico e

magnetico. Conduttori, isolanti, semiconduttori. Circuiti elettrici in corrente continua ed alternata. Effetto Joule. Interpretazione microscopica della corrente elettrica nei solidi conduttori. Il passaggio della corrente elettrica nei componenti a semiconduttore. Comportamento di conduttori percorsi da corrente in un campo magnetico. Effetto Hall. Induzione elettromagnetica. Campi elettrici e magnetici variabili. Vettore di Poynting. Impulso della radiazione elettromagnetica. Principi generali sulla produzione, la trasformazione e il trasporto dell'energia elettrica.

Oscillazioni ed onde

Oscillatore armonico. Energia dell'oscillatore. Sistemi meccanici ed elettrici oscillanti. Oscillazioni smorzate, forzate, risonanza. Onde e loro propagazione. Effetto Doppler. Principio di sovrapposizione delle onde. Teorema di Fourier. Onde stazionarie. Interpretazione dei fenomeni di propagazione ondosa mediante il principio di Huygens. Modelli ondulatorio e corpuscolare della luce. Ottica geometrica: riflessione e rifrazione, lenti sottili, strumenti ottici principali. Doppia rifrazione. Onde elettromagnetiche. Interferenza, diffrazione, polarizzazione e strumentazione relativa. Equazioni di Maxwell. Generazione, trasmissione e ricezione di segnali elettromagnetici. Unità fonometriche. Unità fotometriche.

- Termodinamica e modelli statistici

Sistemi a gran numero di particelle. Grandezze fisiche macroscopiche: pressione, volume e temperatura. Equazioni di stato del gas ideale e dei gas reali. Equilibrio termico e principio zero della termodinamica. Dilatazione termica dei corpi solidi e liquidi. Termometri. Passaggi di stato. Energia interna e primo principio della termodinamica. Propagazione dell'energia termica. Calore e sua misura. Calori specifici. Trasformazioni reversibili ed irreversibili. Ciclo di Carnot. Secondo principio della termodinamica. Entropia. I potenziali termodinamici. Principali macchine termiche. Teoria cinetica del gas ideale. Distribuzione della velocità delle molecole in un gas. Principio di equipartizione dell'energia. Terzo principio della termodinamica.

- Quanti, materia, radiazione

Prime prove dell'esistenza degli atomi. Moto browniano. Determinazione del numero di Avogadro. Il passaggio dell'elettricità nei liquidi. Elettrolisi. Passaggio dell'elettricità negli aeriformi. Scoperta dell'elettrone e determinazione del rapporto e/m . Esperimento di Millikan. Radiazione del corpo nero e ipotesi di Planck. Il fotone. Effetto fotoelettrico. Effetto Compton. Ricerche sulla spettroscopia ed i modelli di atomo. Esperienza di Franck ed Hertz. Numeri quantici. Principio di Pauli. Esperienza di Stern e Gerlach. Effetto Zeeman. Eccitazione e ionizzazione di un

atomo. Radiazioni atomiche ad alta frequenza. Spettro dei raggi X. Emissione stimolata (laser). Lunghezza d'onda di De Broglie. Diffrazione degli elettroni. Principio d'indeterminazione di Heisenberg. Equazione di Schrödinger. Comportamento di una particella in una buca di potenziale rettangolare. Funzioni d'onda. Effetto tunnel.

- La fisica del nucleo e delle particelle

Protone e neutrone. Composizione dei nuclei atomici: modelli nucleari. Numero atomico e numero di massa. Isotopi. Interazioni nucleari. Stabilità nucleare. Radioattività naturale e famiglie radioattive. Decadimento radioattivo. Tipi di radioattività e spettri delle radiazioni. Radioattività artificiale: reazioni nucleari, fissione, fusione. Radiazione cosmica. Acceleratori lineari e circolari. Materia ed antimateria. Produzione di coppie e annichilazione. Il neutrino. Classificazione delle particelle. Interazioni fondamentali e principi di conservazione. Il modello standard. Interazione di particelle cariche e di radiazioni elettromagnetiche con la materia. Metodi di rilevazione di particelle ionizzanti e di fotoni. Interazioni dei neutroni con la materia e tecniche di rilevazione. Grandezze radiometriche e dosimetriche. Effetti biologici delle radiazioni.

- Fonti di energia

Energie alternative: problemi del risparmio energetico. Schema concettuale degli impianti termici convenzionali e degli impianti idroelettrici. Utilizzazione dell'energia nucleare. Principio di funzionamento dei reattori nucleari. Sicurezza nucleare e protezione sanitaria. Stoccaggio dei rifiuti radioattivi.

- L'universo fisico

Struttura e dinamica del sistema solare. Le galassie. Nascita, evoluzione e morte di una stella. Le reazioni termonucleari all'interno di una stella. Il sole. Metodi d'indagine in astrofisica. Ipotesi della relatività generale. Curvatura dello spazio tempo. Rallentamento degli orologi nel campo gravitazionale. Il red-shift. Modelli d'universo.

Temi d'esame proposti in precedenti concorsi

Classe di concorso

049A Matematica e fisica

(vecchia denominazione A065 Matematica e fisica)

Concorso ordinario 1982

Prova scritta di matematica

1) È data un'ellisse **E** di semiassi **a**, **b**.

A. Nella totalità dei quadrilateri inscritti in **E** si caratterizzino quelli di area massima; in particolare, si provi che ogni punto di **E** è vertice di un quadrilatero siffatto. (Si fissi un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale e si tenga presente che: a) nella totalità dei quadrilateri inscritti in una circonferenza, quelli di area massima sono i quadrati; b) ogni ellisse è la trasformata di una circonferenza in un'opportuna affinità; c) le affinità conservano i rapporti tra le aree di figure che si corrispondono).

B. Tra i quadrilateri di area massima, inscritti in **E**, si determinino quelli di perimetro minimo, rispettivamente massimo.

C. Sia **R** il rettangolo di lati **2a**, **2b**, circoscritto ad **E**; si considerino i punti in cui i lati di **R** sono tangenti ad **E** ed i punti in cui le diagonali di **R** intersecano **E**. In ciascuno di tali punti si calcoli il raggio di curvatura di **E**.

D. Si dimostrino i risultati a), b), c), enunciati in 1.

2) A. Si studi la quartica piana **C** definita da:

$$x^4 + y^4 - xy = 0.$$

B. Si mostri in particolare che la parte reale di **C** ha nell'origine un nodo con due cappi, dei quali si chiede l'area.

C. Si determinino le omografie piane (affinità) che mutano in sé la **C**.

D. Si studi il gruppo **G** delle omografie ottenute.

E. Si risolva l'equazione differenziale

$$y' = -\frac{4x^3 - y}{4y^3 - x} \quad (1)$$

F. Si verifichi che le omografie di **G** mutano in sé la famiglia delle linee integrali della (1).

3) Sia dato un tetraedro regolare **T**.

A. Si calcoli il rapporto tra il volume della sfera circoscritta e quello della sfera inscritta in **T**.

B. Si determini l'ampiezza degli angoli diedri determinati dagli spigoli di **T**.

C. Si descriva e si studi il gruppo **G** delle isometrie di **T** in sé.

D. Si descriva il poliedro **P** che si ottiene assumendo come vertici di **P** i centri delle facce di **T**.

E. S'inquadri lo studio del tetraedro regolare nell'ambito della teoria dei poliedri regolari.

F. Si collochi il tetraedro **T** nel primo ottante di un sistema cartesiano ortogonale, di coordinate **x**, **v**, **z**, in modo che un vertice cada nell'origine, uno spigolo sull'asse delle ascisse ed una faccia sul piano **xy** e si dica, supposta **6** la lunghezza dello spigolo, qual è la probabilità che i tre numeri risultanti da tre lanci di un dado, con facce numerate da **1** a **6**, presi nell'ordine del lancio, rappresentino le coordinate di un punto interno al tetraedro.

Prova scritta di fisica

1) I tre principi della termodinamica: loro significato e loro collocazione nell'ambito della fisica classica e moderna sia dal punto di vista macroscopico che microscopico.

2) Raggi X di lunghezza d'onda **0,0060 nm** incidono su elettroni liberi praticamente fermi, dando luogo ad effetto Compton. Dopo aver ricavato la relazione di Compton che dà la variazione della lunghezza d'onda del fotone diffuso in funzione dell'angolo di diffusione, della costante **h** di Planck (**h = 6,63·10⁻³⁴ J sec**), della velocità **c** della luce (**c = 3,00·10⁸ m/sec**) e della massa a riposo **m₀** dell'elettrone (**m₀ = 9,11·10⁻³¹ Kg**), determinare lo spettro dei raggi X diffusi (ossia entro quali valori varia la lunghezza d'onda dei raggi X diffusi), l'energia massima acquisita dagli elettroni urtati dai raggi X oltre che la corrispondente velocità \vec{V}_1

Si ripeta l'esame del precedente problema nel caso in cui la lunghezza d'onda dei raggi X incidenti sia **0,120 nm** e si determini anche in questo caso la velocità massima \vec{V}_2 acquisita dagli elettroni urtati oltre che la lunghezza d'onda di De Broglie ad essi associata.

Un pennello di tali elettroni (con velocità \vec{V}_2) attraversa perpendicolarmente il campo elettrico uniforme generato da due superfici piane affacciate cariche di segno opposto. Il pennello di elettroni, attraversando il campo elettrico per un tratto della lunghezza di **1,00 cm**, subisce una deviazione di **0,20** radianti. Calcolare l'intensità \vec{E} del campo elettrico e la d.d.p. tra le placche nel caso in cui queste distino **5,0 mm**, sapendo che la carica dell'elettrone è **e = 1,60·10⁻¹⁹ C**.

Calcolare quale induzione \vec{B} deve avere un campo magnetico perpendicolare al predetto campo elettrico \vec{E} ed alla velocità \vec{V}_2 degli elettroni, affinché il pennello da essi costituito non subisca alcuna deviazione, quando cioè le forze dovute al campo elettrico ed al campo magnetico si compensino annullandosi.

Quale traiettoria seguirebbero gli elettroni nel caso in cui venisse meno il campo elettrico? Determinare il raggio di curvatura di tale traiettoria e, se il moto è periodico, la sua frequenza.

Se attraverso i precedenti campi elettrico e magnetico si iniettassero elettroni con velocità pari al doppio o alla metà della velocità \vec{V}_2 degli elettroni sopra considerati, tali elettroni seguirebbero la stessa traiettoria di quelli con velocità \vec{V}_2 ? Giustificare la risposta.

3) Nell'esperimento di Young la distanza tra le due fenditure sia **0,14 mm** e la distanza tra lo schermo con le due fenditure e lo schermo su cui si raccoglie la figura di interferenza sia di **450 cm**. Calcolare la distanza tra due frange successive se la lunghezza d'onda della luce monocromatica usata è di **633 nm**.

Calcolare quanto debbano essere larghe le due fenditure affinché nella frangia centrale di diffrazione cadano **7** frange di interferenza.

Calcolare inoltre la distanza tra due frange successive qualora l'esperimento fosse eseguito in acqua (**n = 1,333**).

Se la sorgente di luce usata ha una potenza di **0,50 mW**, quanto fotoni emette al secondo? (**h = 6,63·10⁻³⁴ J·sec**, **c = 3,00·10⁸ m/sec**).

Ripetendo l'esperimento di Young con onde elettromagnetiche di frequenza **10,0 GHz**, con due fenditure distanti **12 cm** e si raccolgono le frange di interferenza su uno schermo a **60 cm** dalle doppie fenditure, si trovano frange di interferenza non equidistanti: determinare la distanza tra la frangia centrale e la prima frangia laterale e la distanza tra questa e la seconda frangia laterale. Si tratti, in generale, il tema della diffrazione e dell'interferenza delle onde elettromagnetiche.

1984

Prova scritta di matematica

1) In un sistema di assi coordinati ortogonali **Oxyz** è data la circonferenza **C** di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

A. Si determini il luogo **L** dei punti dello spazio che proiettano la circonferenza **C** nel piano **x = 0** in parabole e si studi la totalità delle parabole così ottenute.

B. Si esamini la corrispondenza che si ottiene quando si definiscono corrispondenti due punti del luogo **L** dai quali la circonferenza **C** è proiettata nella stessa parabola.

2) In un sistema di assi coordinati ortogonali **Oxy** sono assegnati nell'ordine cinque punti

$$P_i = (x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

A. Si formuli un algoritmo, in termini delle coordinate (x_i, y_i) , per stabilire se i punti **P_i** sono a tre a tre non allineati e, in questa ipotesi, si formulino successivamente, sempre in termini delle coordinate (x_i, y_i) , un algoritmo per stabilire se la poligonale **P₁P₂P₃P₄P₅P₁** è non intrecciata, un algoritmo per stabilire se la stessa poligonale delimita un poligono convesso ed un algoritmo per il calcolo dell'area **A** di tale poligono, deducendone che essa è una funzione continua delle dieci variabili x_1, y_1, x_5, y_5

B. Dati in particolare i punti

$$P_1 = (0,0), P_2 = (0,2), P_3 = (2,2), P_4 = (1,1), P_5 = (2,0),$$

si determini il baricentro del poligono **S** delimitato dalla poligonale **P₁P₂P₃P₄P₅P₁** e si individui, mediante opportune disequazioni, la regione **R** del piano formata dai punti che vedono la figura **S** sotto un angolo di ampiezza $\geq \pi/4$ (un punto **P** appartiene alla regione **R** se non esiste alcuna regione angolare di ampiezza minore di $\pi/4$, con vertice in **P**, che contiene per intero la figura **S**) e si calcoli l'area di **R**.

C. Si scelgano in modo casuale due numeri interi **a** e **b**, entrambi compresi tra **1** e **100**, estremi inclusi, e si calcoli la probabilità che il punto di coordinate $(a/50, b/50)$ sia interno al detto poligono **S**.

3) A. Si risolva l'equazione differenziale

$$(1 + X^2)^2 yy' + 2x = 0$$

si studi la famiglia delle curve ottenute.

B. Si costruisca un algoritmo per la soluzione numerica della precedente equazione e lo si traduca eventualmente in un programma mediante uno dei linguaggi correnti.

Prova scritta di fisica

1) Le equazioni di Maxwell e le trasformazioni di Lorentz.

2) Dalla legge dei gas perfetti espressa nella forma

$$p V = 2 n N \zeta / 3$$

(dove p indica la pressione del gas, V il volume, n il numero di grammolecole, N il numero di Avogadro

ed ζ l'energia media delle molecole) dedurre il rapporto tra calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante sia per un gas monoatomico sia per un gas biatomico.

Calcolare quindi: a) la velocità quadratica media degli atomi di gas elio, se questo si trova alla temperatura di 0°C e la corrispondente lunghezza d'onda associata di De Broglie, b) l'energia E necessaria per ionizzare un atomo di idrogeno (si ipotizzi l'elettrone dell'atomo di idrogeno alla distanza di **0,05 nm** dal nucleo in condizioni di equilibrio) e la temperatura a cui si debbono trovare gli atomi di idrogeno affinché la loro energia cinetica media sia E ; c) l'incremento di entropia per una grammolecola di idrogeno che passi da 273°K a 742°K sia a volume costante sia a pressione costante. Infine si determinino i livelli energetici possibili come autovalori per un atomo di elio confinato in una "scatola cubica" di lato **1 mm** (si consideri cioè un atomo di elio confinato in un cubo al cui interno il potenziale è nullo e alle pareti diviene infinito). Si calcoli quindi il valore del livello energetico più basso.

(Si ricordano i valori di alcune grandezze:

numero di Avogadro = $6,0 \cdot 10^{23}$

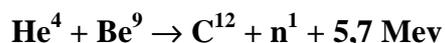
costante R del gas perfetto = $8,3 \text{ J}/^\circ\text{K}$

massa di grammoatomo di elio = $4,0 \text{ g}$

costante di Planck = $6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$)

3) Una sferetta di vetro del raggio di **5 mm** (densità **$2,7 \text{ g}/\text{cm}^3$**) urta elasticamente una sferetta di acciaio di uguali dimensioni (densità **$8,1 \text{ g}/\text{cm}^3$**). La pallina di vetro acquista la velocità con cui va ad urtare la sferetta di acciaio rotolando lungo un piano inclinato alto **29 cm** e lungo **90 cm**. Calcolare la velocità della sferetta di vetro prima e dopo l'urto e la velocità della sferetta di acciaio dopo l'urto, sapendo che la sferetta di vetro (o meglio il suo baricentro) prima dell'urto si muove lungo una retta che dista **6 mm** dal baricentro della sferetta in acciaio.

Si studi quindi la reazione:



e si determini la velocità massima del neutrone prodotto se la reazione avviene bombardando una targhetta di **Be** con particelle alfa accelerate per mezzo di una d.d.p. di **1.000.000 Volt**.

(Si ricordano i valori di alcune grandezze:

massa del neutrone = $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$

massa del He^4 = $6,6 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$)

massa del $\text{Be}^9 = 1,5 \cdot 10^{-26} \text{ Kg}$
 massa del $\text{C}^{12} = 2,0 \cdot 10^{-26} \text{ Kg}$
 carica dell'elettrone = $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Si tratti quindi il tema della radioattività sia naturale che indotta.

Concorso ordinario 1990

Prova scritta di Matematica

Il candidato svolga uno dei seguenti temi:

1) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = 1 + y/x$$

- La funzione f_n , definita sull'insieme \mathbf{R} dei reali maggiori o uguali a zero e che assume valori in \mathbf{R} sia così definita:

$$\begin{cases} f_n(x) = x(n + \log x) & \text{per ogni } x \text{ reale } > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

essendo $\log x$ il logaritmo naturale di x ed n un intero assoluto. Sia C_n il grafico della f_n , in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico.

Mostrare che le funzioni f_n , di x presentano un minimo; studiare l'andamento delle C_n per $x = 0$ e per x tendente a più infinito. Mostrare che la curva C_{n+1} , grafico della funzione $f_{n+1}(x)$, può essere dedotto dalla curva C_n per mezzo di un'omotetia, di centro nell'origine e rapporto da determinare.

- Posto $n = 0$ nella $f_n(x)$, tracciare il grafico C_0 .

- Sia α la soluzione dell'equazione

$$f_0(t) = 1$$

Dedurre una limitazione per la radice α .

Descrivere un algoritmo per il calcolo approssimato di α .

- Considerare la trasformazione φ_a del piano in se stesso, che ad ogni punto $\mathbf{M}(x,y)$ associa il punto $\mathbf{M}'(x',y')$ tale che

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = ax \log a + ay \end{cases} \quad \text{essendo } a \text{ un reale } > 0.$$

Mostrare che l'insieme Φ delle applicazioni φ_a quando a descrive l'insieme dei reali maggiori di zero, è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

- Trattare la funzione logaritmo nel campo reale e nel campo complesso.

2) Calcolare l'integrale definito

$$S_n(K) = \int_k^{e^{-n}} x(n + \log x) dx$$

dove $\log x$ è il logaritmo naturale.

Mostrare che $S_n(k)$ ammette un limite U_n quando k tende a zero. Mostrare che la successione dei valori U_n (con n numero naturale) è una progressione geometrica, di cui si troveranno il primo termine e la ragione.

- Considerare l'insieme di coniche C_k definite in un sistema di assi coordinati ortogonali monometrici da:

$$x^2 + (k + 2)y^2 - 2xy - 6kx = 0$$

con k reale.

Determinare per quali valori di k si ottengono coniche degeneri.

Determinare per quali valori di k si ottengono iperboli aventi gli asintoti ortogonali.

Ridurre a forma canonica la conica C_{-1} .

- Considerare un punto P qualunque della parabola di equazione

$$y^2 = \frac{3x}{\sqrt{2}}.$$

Considerare la normale n alla parabola e la perpendicolare p all'asse di simmetria condotte dal punto P : mostrare che la lunghezza del segmento determinato da n e da p sull'asse di simmetria della parabola è indipendente da P . - Esporre la nozione di probabilità subordinata, il teorema della probabilità composta e il teorema di Bayes, corredando l'esposizione con esempi didattici a livello di Scuola Secondaria Superiore.

3) In un sistema di assi coordinati ortogonali monometrici di origine O considerare il punto $A(-1,0)$ e il punto $C(O,k)$, con k numero reale.

- Trovare l'equazione del luogo dei punti M ed N comuni alla retta AC e alla circonferenza di centro C e passante per O . Studiare questo luogo di punti mettendone in evidenza le singolarità.

- Considerare l'inversione per raggi vettori reciproci di centro nell'origine e raggio $r = \hat{O}\hat{A}$. Scrivere le equazioni di tale trasformazione geometrica ed elencarne alcune proprietà.

Trovare le equazioni delle inverse della retta AC e della circonferenza di centro C passante per O . Dedurre il luogo dei punti M' ed N' inversi di M ed N . Indicare inoltre una costruzione geometrica di tali punti.

Sia M' il punto di ascissa positiva: dimostrare che la bisettrice dell'angolo $\hat{A}M'O$ ha una direzione fissa.

- Trovare il luogo geometrico dell'ortocentro H del triangolo $AM'O$.

- Trattare i metodi di integrazione delle equazioni differenziali.

Prova scritta di Fisica

Il candidato tratti a scelta uno dei seguenti temi:

1) Diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel.

2) Un tubetto di rame (densità $8,93 \text{ g/cm}^3$) del diametro esterno di **10 mm** e interno di **9 mm**, lungo **120 mm**, è appoggiato alle estremità su un binario costituito da due rotaie di rame distanti tra loro **12 cm** e inclinate di un angolo di 30° rispetto al piano di terra.

Le due rotaie sono collegate da una resistenza di **15 Ω** e poste in un campo magnetico uniforme verticale di induzione magnetica **2 Wb/m²**.

Calcolare la velocità limite che il cilindro raggiunge rotolando sul binario: si supponga di potere trascurare la resistenza meccanica e la resistenza elettrica di cilindro e rotaie.

Calcolare quindi l'energia cinetica (di traslazione e di rotazione) acquisita dal cilindro di rame.

La velocità raggiunta dal cilindro di rame può essere misurata per mezzo della differenza in lunghezza d'onda tra un fascio di onde elettromagnetiche incidente sul cilindro e il fascio riflesso (effetto Doppler) supposto che emittente e ricevente siano in testa al binario.

Calcolare la variazione della frequenza dell'onda riflessa rispetto a quella dell'onda incidente quando il cilindro ha raggiunto la velocità limite, sapendo che le onde elettromagnetiche incidenti hanno una frequenza di **43 GHz**.

Calcolare la potenza dissipata nella resistenza elettrica posta tra le rotaie quando il cilindro si muove alla velocità limite.

3) Calcolare l'energia del campo elettrico di una sfera conduttrice di raggio **R** su cui è posta una carica **Q**.

Supposto che la massa dell'elettrone ($0,911 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$) sia dovuta interamente all'energia del suo campo elettrico, calcolare il raggio dell'elettrone nelle ipotesi:

a) che la sua carica sia distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera;

b) che la sua carica sia distribuita uniformemente nel volume di una sfera. (carica dell'elettrone **1,60 · 10⁻¹⁹ Coulomb**, velocità della luce nel vuoto **3,00 · 10⁸ m/s**).

Si analizzino quindi le caratteristiche dell'elettrone (massa a riposo, massa dinamica, carica elettrica, spin, ...) e si tratti come la ricerca sul comportamento dell'elettrone abbia segnato lo sviluppo della fisica nell'ultimo secolo.

Durata massima della prova: ore otto.

Sia per la prova scritta di matematica che quella di fisica è consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.

Concorso riservato 1983 (art.76)

1) La divisione dei polinomi e la regola di Ruffini.

2) Equivalenza nel piano o nello spazio.

3) Punti notevoli dei triangoli.

4) Potenza di un binomio.

5) Applicazioni dell'integrale definito.

6) Lenti e prismi.

7) Il secondo principio della termodinamica.

8) Interferenza.

9) Strumenti e metodi di misura..

10) Radiazioni ionizzanti.

11) Leggi della dinamica.